§ 2 Lokale Kurventheorie im $\mathbb{R}^3$

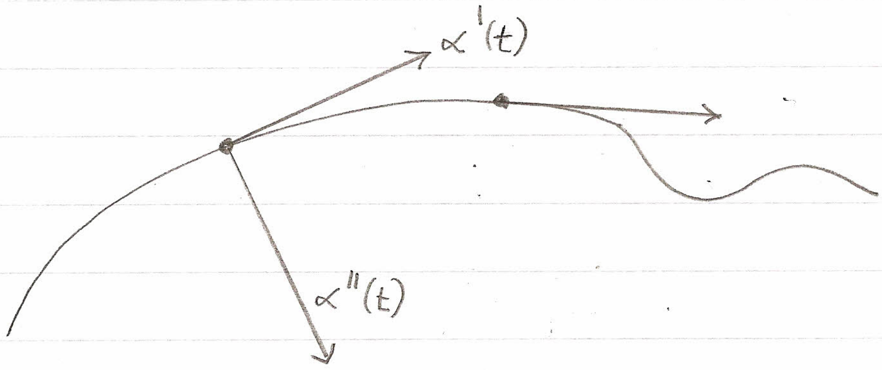
Ist $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre Kurve, und betrachtet man die Funktion $t \mapsto \alpha'(t)$, so misst deren Änderung in der Nähe von t_0 einerseits (bezogen auf die Länge der Vektoren) eine Änderung der Durchlaufgeschwindigkeit und andererseits eine Änderung des Winkels zwischen $\alpha'(t)$ und $\alpha'(t_0)$, und nur diese Winkeländerung beschreibt die geometrische Größe, die man mit dem Begriff Krümmung verbindet. Aus diesem Grund macht es Sinn, nachfolgend alle Kurven nach der Bogenlänge zu parametrisieren ($|\alpha'| \equiv 1$), sonst müsste man mehr oder weniger mit $\alpha'/|\alpha'|$ rechnen, und das ist recht umständlich.

<u>Definition</u> : (<u>Krümmung</u>)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve. Man nennt

$$\varkappa(t) := |\alpha''(t)| \geqslant 0$$

die Krümmung von α bei $t \in I$.



Geraden sollten dadurch charakterisiert sein, dass ihre Krümmung verschwindet: Ist $\alpha(t) = tu + v$ mit $u, v \in \mathbb{R}^3$ und $|u| = 1$ (Parametrisierung nach der Bogenlänge), so gilt $\alpha'' \equiv 0$, also $\varkappa \equiv 0$. Ist umgekehrt $\beta : I \to \mathbb{R}^3$ nach der Bogenlänge parametrisiert mit $\varkappa \equiv 0$, so folgt $\beta'' = 0$ und nach zweimaliger Integration $\beta(t) = \eta t + \xi$ mit $\eta, \xi \in \mathbb{R}^3$.

Dagegen sollten Kreise konstante Krümmung $\neq 0$ haben:

Sei etwa $\alpha : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\alpha(t) = (r e^{it}, 0)$,

$r > 0$. Hier müssen wir zunächst nach der Bogenlänge

umparametrisieren. Es ist $(t_0 := 0)$

$$s(t) = \int_0^t |\alpha'(\tau)| \, d\tau = r t$$

mit $s([0,2\pi]) = [0, 2\pi r]$, so dass sich als

Umparametrisierung nach der Bogenlänge ergibt:

$$\tilde{\alpha} : [0, 2\pi r] \to \mathbb{R}^3, \quad \tilde{\alpha}(t) := \alpha(t/r).$$

Die Krümmung $\tilde{\varkappa}$ von $\tilde{\alpha}$ ist gemäß

$$\tilde{\alpha}''(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\alpha'(t/r)\right) = \frac{1}{r^2}\alpha''(t/r)$$

$$= \frac{1}{r}\left(-e^{it/r}, 0\right)$$

dann gegeben durch $1/r$. Anders gesagt: <u>Die Krümmung der Kreislinie ist umgekehrt proportional zum Radius.</u>

Ist $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ nach der Bogenlänge parametrisiert

und β die umgekehrt durchlaufene Kurve, also $\beta(s) :=$

$\alpha(-s)$ für $s \in J := \{-\tau : \tau \in I\}$, so gilt

$$\beta'(s) = -\alpha'(-s) \Longrightarrow |\beta'| \equiv 1$$

und $\beta''(s) = \alpha''(-s)$, so dass $\varkappa_\beta(s) = \varkappa_\alpha(-s)$.

$\square$

Sei $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ nach der Bogenlänge parametrisiert.

Dann ist $\alpha'(s) \cdot \alpha'(s) \equiv 1$, also

$$0 = \alpha'(s) \cdot \alpha''(s) .$$

Schreibt man <u>$t(s)$ für den Einheitstangentenvektor</u> $\alpha'(s)$

und definiert für $\varkappa(s) \neq 0$ den

<u>Normalen - oder Hauptnormalenvektor</u> $\boxed{n(s) := \dfrac{t'(s)}{|t'(s)|} = \dfrac{\alpha''(t)}{\varkappa(s)}}$,

so gilt

$$t(s) \cdot n(s) = 0,$$

<u>der Hauptnormalenvektor ist senkrecht zum Einheitstangentenvektor.</u>

<u>Definition</u>: Sei $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ nach der Bogenlänge parametrisiert. a) Punkte $s \in I$ mit $\varkappa(s) = 0$ ($\Leftrightarrow \alpha''(s) = 0$) heißen <u>singuläre Punkte der Ordnung 1.</u>

In singulären Punkten der Ordnung 1 ist der Normalenvektor nicht definiert.

b) Ist $\varkappa(s) \neq 0$, so heißt die von $t(s)$ und $n(s)$ in $\mathbb{R}^3$ aufgespannte Ebene <u>die Schmiegebene bei s.</u> (engl. osculating plane)

Nachfolgend sei $\varkappa(s) \neq 0$ für alle $s \in I$. Offenbar gilt

$$(1) \quad \boxed{t'(s) = \varkappa(s) \cdot n(s)},$$

denn $t'(s) = \alpha''(s) = |\alpha''(s)| \dfrac{\alpha''(s)}{|\alpha''(s)|} = \varkappa(s)\, n(s)$.

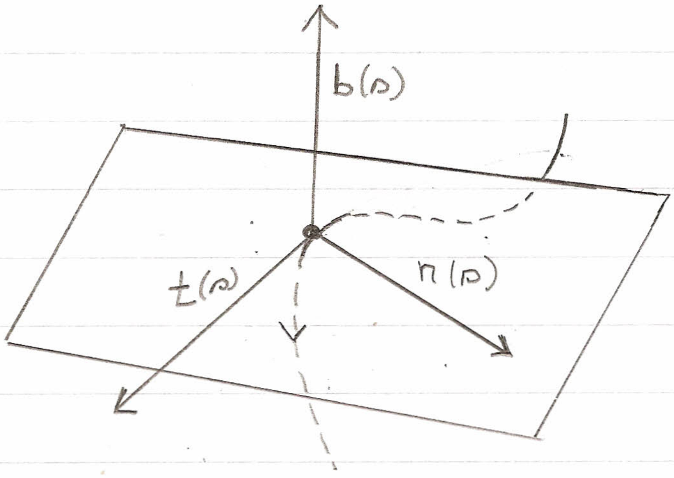
Da es keine singulären Punkte der Ordnung 1 geben soll, ist

$$\boxed{b(s) := t(s) \times n(s)}$$

wohldefiniert und hat wegen

$$|t| \equiv 1 \equiv |n|, \quad t \bullet n = 0$$

Länge 1. Ferner ist $b(s)$ senkrecht zur Schmieg-ebene.



$b(s)$ heißt <u>Binormalenvektor</u> in s.

<u>Definition</u> (<u>Frenet'sches Dreibein</u>)

Sei $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ nach der Bogenlänge parametrisiert. Ist $\kappa(s) \neq 0$, so bilden die Vektoren $t(s), n(s), b(s)$ in dieser Reihenfolge eine <u>positiv</u> orientierte <u>Orthonormalbasis</u> von $\mathbb{R}^3$, die das <u>Frenet'sche Dreibein</u> genannt wird.

Als Maß für die Änderung der Schmiegebene kann man die Größe $|b'(s)|$ ansehen. <u>Was kann man über den Vektor $b'(s)$ sagen?</u>

Es ist

$$b'(s) = \frac{d}{ds}\left(t(s) \times n(s)\right) =$$

$$t'(s) \times n(s) + t(s) \times n'(s) \underset{(1)}{=}$$

$$\varkappa(s) \underbrace{n(s) \times n(s)}_{=0} + t(s) \times n'(s) =$$

$$t(s) \times n'(s) \, ;$$

so dass $\quad b'(s) \perp t(s).\quad$ Aus $|b(s)| = 1$ folgt

$$0 = \frac{d}{ds}\left(b(s) \cdot b(s)\right) = 2\, b'(s) \cdot b(s),$$

also $\quad b'(s) \perp b(s).\quad$ <u>Wenn aber $b'(s)$ senkrecht ist zu $t(s)$ und $b(s)$, dann muss wegen der ONB-Eigenschaft von t, n, b der Vektor</u>

$b'(s)$ an jeder Stelle s skalares Vielfaches von $n(s)$ sein.

Definition: Es sei $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ nach der Bogenlänge parametrisiert mit $\alpha''(s) \neq 0$ auf I, also $\varkappa > 0$.

Dann gibt es genau eine Funktion $\tau: I \to \mathbb{R}$ mit

$$(2) \quad \boxed{b'(s) = \tau(s)\, n(s), \; s \in I.}$$

$\tau(s)$ heißt die Torsion von α bei s.

Schließlich berechnen wir noch die Änderung $n'(s)$ des Normalenvektors: Mit $n = b \times t$

(beachte: $b := t \times n \Rightarrow b \times t =$

$(t \times n) \times t = (t \cdot t)\, n - (n \cdot t)\, t = n$)

gilt

$$n'(s) = \frac{d}{ds}\big(b(s) \times t(s)\big) =$$

$$b'(s) \times t(s) + b(s) \times t'(s) \underset{(1),(2)}{=}$$

$$\tau(s)\; n(s)\times t(s) \;+\; \varkappa(s)\; b(s)\times n(s) \;=$$

$$-\tau(s)\; b(s) \;-\; \varkappa(s)\, t(s)\,,$$

wobei wir $\quad b\times n \underset{\text{Def. } b}{=} (t\times n)\times n = -t$

benutzt haben. Es folgt

$$(3) \qquad \boxed{n'(s) = -\tau(s)\,b(s) - \varkappa(s)\,t(s),\; s\in I.}$$

Wir fassen unsere Rechnungen (1)-(3) zusammen:

Satz (Frenet'sche Formeln)

Sei $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ nach der Bogenlänge parametrisiert mit $\varkappa(s) = |\alpha''(s)| > 0$. Dann erfüllt das Frenet'sche Dreibein (t, n, b) das Differentialgleichungssystem

$$\circledast \qquad \boxed{\begin{aligned} t' &= \varkappa n\,, \\ n' &= -\varkappa t - \tau b\,, \\ b' &= \tau n \end{aligned}}$$

auf dem Intervall I.

Bemerkungen: 1.) Das Frenet'sche Dreibein ist eine Funktion $(t,n,b): I \to \mathbb{R}^9$, links in ⊛ steht die erste Ableitung dieser Funktion, rechts vom Gleichheitszeichen steht eine Funktion $I \to \mathbb{R}^9$, die sich aus Komponenten von (t,n,b) teilweise versehen mit den Gewichtsfunktionen $\varkappa$ und τ zusammensetzt.

2.) Physikalisch interpretiert kann man sich eine Raumkurve $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ dadurch erzeugt denken, dass man eine Gerade biegt ("Krümmung") und gleichzeitig verdreht ("Torsion").

Dies führt auf folgende Frage: Sei I ein Intervall um z.B. 0, auf dem Funktionen $\varkappa: I \to (0,\infty)$, $\tau: I \to \mathbb{R}$ gegeben sind. Außerdem sei eine positiv orientierte ONB (t_0, n_0, b_0) von $\mathbb{R}^3$ fixiert.

Gibt es dann eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve $\alpha: I \to \mathbb{R}$ mit $(t(0), n(0), b(0)) = (t_0, n_0, b_0)$, deren Krümmung und Torsion gerade $\varkappa$ bzw τ ist ?

Wenn ja, wie steht es mit der Eindeutigkeit ?

Dies führt auf den Fundamentalsatz der lokalen Kurventheorie, der aussagt, dass es bei Vorgabe von $\varkappa$ und τ eine im wesentlichen eindeutige Kurve gibt.

3.) Folgende Bezeichnungen sind üblich:

rektifizierende Ebene := die von t und b aufgespannte Ebene,

Normalebene := die von n und b ..... ,

Haupt- bzw. Binormale := Gerade durch $\alpha(s)$ in Richtung $n(s)$ bzw. $b(s)$,

$1/\varkappa$:= Krümmungsradius.

$\square$